

РЕЦЕНЗИЯ

от доц. София Ивановска,
Институт по информационни и комуникационни технологии
към Българската академия на науките (ИИКТ-БАН)
на дисертационен труд на
Силви-Мария Тодорова Гюрова
на тема

„Стохастични числени методи за оценка на собствени стойности“
представен за придобиване на образователна и научна степен „доктор“
по докторска програма „Математическо моделиране и приложение на математиката“
професионално направление 4.5 „Математика“
с научен ръководител проф. д-р Анета Караиванова, ИИКТ-БАН

Съгласно решение на Научния съвет на ИИКТ (протокол № 4/29.04.2026г.) и заповед № 101/04.05.2026 г. на директора на ИИКТ съм определена за член на научното жури по процедурата за придобиване на ОНС „Доктор“ в докторска програма „Математическо моделиране и приложение на математиката“ в ПН 4.5 Математика. Съгласно решението на първото заседание на журито (Протокол № 1/8.05.2026 г.) съм определена за рецензент. Получих документите по процедурата в съответствие със съответните нормативни документи.

1. Актуалност на тематиката

Оценяването на екстремални собствени стойности на симетрични матрици е задача с нарастваща актуалност, тъй като намира приложение в редица съвременни научни и технологични области - от квантовата механика и финансовото моделиране до машинното обучение и анализа на данни. С непрекъснатото увеличаване на размерността на задачите в тези области традиционните точни и итерационни методи се оказват недостатъчно ефективни поради ограничения от гледна точка на налична памет, изчислителна сложност и трудност при паралелизация. Стохастичните методи се налагат като перспективна алтернатива, тъй като са естествено паралелизируеми и скалируеми към матрици с хиляди или милиони елементи. Развитието на високопроизводителните изчислителни системи допълнително засилва необходимостта от разработване на нови, по-бързи и по-точни стохастични алгоритми, адаптирани към съвременния хардуер. Именно това прави изследването в тази област не само теоретично значимо, но и практически належащо в контекста на актуалните предизвикателства на науката и индустрията.

2. Познаване на състоянието на проблема

Кандидатката демонстрира задълбочено познаване на тематиката на настоящото мултидисциплинарно изследване и добра осведоменост относно съвременното състояние на разглеждания проблем. Това се потвърждава от ясно формулираната цел, коректно дефинираните изследователски задачи, последователното изложение в дисертационния труд и използваната библиография, включваща 121 цитирани източника.

3. Методология на изследването

Изследването е насочено към оценяване на екстремалните собствени стойности на несингулярни симетрични матрици, формулирано чрез стандартното уравнение $Ax = \lambda(A)x$. За намиране на максималната собствена стойност се прилагат Степенният и Квази-Монте Карло методи (базирани на Степенния и Резолвентния Степенен метод), а за минималната - Резолвентният Монте Карло и Резолвентният Квази-Монте Карло подход. При Монте Карло методите се конструира случайна величина с математическо очакване, равно на търсеното решение, като приближената стойност се получава като средна аритметична от N независими реализации. В този случай вероятностната грешка е от порядък $O(N^{-1/2})$, оценена чрез Централната гранична теорема. При Квази-Монте Карло методите вместо псевдослучайни точки се използват детерминистични редици с малък дискрепанс (редиците на Соболев и Холтърн), при което грешката, оценена чрез неравенството на Коксма-Хлавка, е от по-добър порядък $O(N^{-1}(\log N)^k)$.

За да се преодолее основният недостатък на детерминистичните квазислучайни редици, а именно липсата на естествен вероятностен подход за оценка на грешката и рискът от корелации при по-високи размерности, в дисертацията се използват рандомизирани (разбъркани) редици на Соболев и Холтърн. Разбъркването се реализира чрез комбинация от методите *MatousekAffineOwen* и *RR2*, съвместно с операторите *skip* и *leap*, което намалява корелациите и подобрява равномерността на покритие. Итерационните стохастични методи, изградени върху верига на Марков с k стъпки (преходи), съчетават систематична грешка (зависеща от броя итерации) и стохастична грешка (зависеща от размера на извадката N), като ключова цел на изследването е намирането на оптимален баланс между двата типа грешки.

4. Структура и основни приноси на дисертацията

Дисертационният труд на Силви-Мария Гюрова е с общ обем от 119 страници. В тях са включени увод, три основни глави, заключение, приложение и библиография със 121 източника. Той съдържа 15 фигури, 16 таблици и списък на използваните означения и абревиатури. Основната цел на дисертацията е да се предложат и анализират стохастични числени методи за оценяване на собствени стойности чрез Монте Карло и рандомизирани квази-Монте Карло алгоритми за приближено изчисляване на екстремните собствени стойности на симетрични квадратни матрици. В заключението са изброени основните научни и научни-приложни приноси, които са обобщени по-долу.

Уводът започва с представяне на значимостта на задачата за намиране на екстремни собствени стойности на квадратни матрици с голяма размерност и нейните приложения в квантова механика, финансова математика, спектрална теория на графи, обработка на изображения и тензорен анализ. Представен е обстоен литературен обзор, обхващащ основните научни постижения на водещи изследователи и в разглежданата област, което свидетелства за добрата осведоменост на докторантката относно съвременното състояние на проблема. Задачата е дефинирана чрез уравнението $Ax = \lambda(A)x$, като се търсят минималната и максималната собствена стойност съгласно наредбата $\lambda_{\min} \leq \dots \leq \lambda_{\max}$. Разгледани са итерационни методи с изчислителна сложност $O(n^2k)$, и стохастични методи, които преодоляват ограниченията на детерминистичните итерационни методи.

Стохастичните методи се характеризират с линейна зависимост между размерността на задачата и необходимата памет, лесна паралелизация и приложимост към матрици с голяма размерност. Стандартният Монте Карло постига грешка от порядък $O(N^{-1/2})$, докато квази-Монте Карло методите достигат $O(N^{-1}(\log N)^k)$, което представлява съществено подобрение при гладки подинтегрални функции. Описани са редиците на Соболев и Холтърн и тяхното рандомизиране чрез операторите *skip* и *leap*, които намаляват корелациите при високи размерности. Формулирани са четири задачи: изследване на Степенния (Резолвентния) Монте Карло и квази-Монте Карло методи, разработване на ефективни алгоритми, провеждане на числени експерименти и приложение към задача от финансовата математика за оценка на пазарен риск. Експериментите са проведени на клъстер от 12 сървъра Fujitsu Primergy RX 2540 M4 с GPU карти NVIDIA Tesla V100 32GB и процесори Intel Xeon Gold 5118.

Първа глава е посветена на разработването и изследването на ефективни стохастични алгоритми за оценяване на максималната собствена стойност на симетрични матрици чрез Степенния Монте Карло и Степенния Квази-Монте Карло метод. В началото на главата е формулирана задачата за намиране на максималната собствена стойност λ_{\max} на несингулярна симетрична матрица чрез уравнението $Ax = \lambda(A)x$. Представен е детерминистичният Степенен метод, базиран на коефициента на Рейли, и е обяснена неговата сходимост, определена от съотношението $|\lambda_2/\lambda_1|^2$, като е отбелязано, че трудности възникват, когато първите две собствени стойности са близки. След това е въведен Стохастичният Степенен метод, при който максималната собствена стойност се изразява като граница на отношение на скаларни произведения, оценявани чрез верига на Марков. Конструирани са случайните величини $\theta^{(k)}$ и $\theta^{(k-1)}$, чиито математически очаквания са равни на съответните скаларни произведения, а отношението им дава приближение на λ_{\max} . Централна роля играе изборът на допустим начален вектор на плътност и допустима матрица на преходната плътност (уравнение (1.16)). На тази основа са разработени почти оптималните СМК и СКМК алгоритми, представени с псевдокод, с изчислителна сложност $O(Nnk + n^2)$, като при $N > n$ доминира $O(Nnk)$. За СКМК варианта се използват разбъркани редици на Соболев и Холтърн вместо генератори на псевдослучайни числа. Числените експерименти са проведени върху две симетрични плътни матрици с размерности $n=100$ и $n=500$, като са използвани генераторите Mersenne Twister и Middle Square при СМК алгоритмите. Резултатите

показват, че почти оптималните алгоритми превъзхождат класическите си аналози по точност и изчислителна ефективност, като дисперсията при почти оптималните варианти е с около два порядъка по-малка в сравнение с класическите. Абсолютните грешки при почти оптималните СМК алгоритми са от порядък 10^{-4} до 10^{-5} , докато при класическите варианти са от порядък 10^{-2} . Оптималният баланс между стохастичната и систематичната грешка се постига при $k=8$ за $n=100$ и $k=9$ за $n=500$ при СМК, и съответно при $k=11$ и $k=12$ при СКМК с редици на Соболев, като алгоритмите с редици на Соболев систематично превъзхождат тези с редици на Холтън.

Във втора глава, на базата на Резолвентния Монте Карло метод, предложен от Караиванова и Димов е описан почти оптимален Монте Карло подход за оценяване на минималната собствена стойност на симетрична матрица, който избягва изричното намиране на обратната матрица, което е скъпа операция при задачи с голяма размерност. Вместо обратната матрица се въвежда резолвентна матрица R_q , която се представя като безкраен степенен ред и чиито собствени стойности са свързани с тези на A чрез явна формула. Знакът на ускоряващия параметър q определя коя екстремална собствена стойност се оценява, като за настоящото изследване от основен интерес е случая $q < 0$. Сходимостта на Резолвентния Степенен метод зависи съществено от двата параметъра q и m , като по-голямо m ускоряваходимостта за сметка на по-висока изчислителна цена. На практика резолвентната матрица се апроксимира с крайна сума, отрязана при стъпка k , като систематичната грешка от това отрязване се контролира аналитично. Ключов теоретичен резултат е установената линейна зависимост между параметрите m и k , която позволява оптимален избор на двойката (m, k) при предварително зададено ниво на систематична грешка ϵ и параметър на ускорение q . В стохастичен контекст математическите очаквания се апроксимират чрез извадкови средни от N реализации на верига на Марков, като двата предложени алгоритъма, Резолвентен Монте Карло и Резолвентен Квази-Монте Карло, се различават по вида на използваните редици. При Монте Карло подхода стохастичната грешка е от порядък $O(N^{-1/2})$, докато при квази-Монте Карло подхода може да се очаква по-бърза сходимость чрез използване на редици с малък дискрепанс. За добавяне на контролирана случайност без загуба на предимствата на детерминистичните редици се използват рандомизирани редици на Соболев. Числените експерименти са проведени върху случайно генерирани симетрични матрици с размерности $n=500$ и $n=1000$, при които собствените стойности са конструирани така, че да гарантират сходимость на метода. Параметрите m и k не се избират произволно, а се определят въз основа на теоретичните оценки за систематичната грешка при предварително фиксирано ниво $\epsilon_{sys}=0.001$. При $n=500$ най-добрият баланс между двата вида грешки е постигнат при $k=5$, $m=10$ и $N=512$, а при $n=1000$ - при $k=5$, $m=5$ и $N=1024$, което потвърждава теоретичното предположение за линейната връзка между m и k . Установено е, че увеличаването на N отвъд тази граница не води до монотонно подобряване на точността, тъй като систематичната грешка, контролирана от m и k , вече определя долна граница за постижимата точност. Това подчертава, че общата грешка зависи от баланса между двата ѝ вида, а не само от броя на симулациите.

Трета глава прилага разработените стохастични алгоритми към реален финансов проблем - оценяване на концентрацията на пазарен риск в инвестиционен портфейл чрез спектралния анализ на корелационни матрици. Корелационната матрица се конструира от емпирични финансови данни за доходностите на активите, като нейната максимална собствена стойност служи като количествен индикатор за степента, в която съвместното движение на активите се обяснява от един доминиращ пазарен фактор. Тази стойност е пряко свързана с дела на обяснената вариация (FVE_1), който измерва каква част от общата изменчивост на портфейла се поглъща от първата главна компонента. Данните са извлечени от два независими източника с различна времева и структурна характеристика, позволяващи сравнение на алгоритмичното поведение при различна размерност и информационна наситеност. Първата матрица обхваща дългосрочни месечни наблюдения върху 32 глобални актива, а втората - петгодишни данни за 490 компании от индекса S&P500. При първата матрица делът на обяснената вариация е $FVE_1=56.71\%$, а при втората - $FVE_1=41.04\%$, което показва, че при по-широкия пазарен индекс рискът е по-разпределен между повече фактори. Числените експерименти разкриват, че и при двете матрици съществува оптимална стойност на броя преходи k , при която се постига баланс между систематичната и стохастичната грешка, и че по-нататъшното увеличаване на k не подобрява съществено точността. Тази балансираща стойност се запазва и при двете матрици независимо от разликата в размерността им, което потвърждава устойчивостта на теоретичните оценки. При по-голямото портфолио, при малък брой симулации алгоритмите с параметри *skip* и *leap* показват предимство, но то отслабва при по-голям N . За по-голям N предимство показват алгоритмите PMC(MT) и PQMC(d)(S), които демонстрират устойчива и монотонна сходимост. Крайният извод е, че за постигане на оперативна точност от порядъка на няколко знака след десетичната запетая е достатъчен сравнително малък брой симулации, което прави алгоритмите практически приложими за оценяване на пазарен риск при матрици с голяма размерност.

Научните приноси на дисертацията могат да бъдат обобщени:

- Прецизирана е конструкцията на случайните величини $\theta^{(k)}$ и $\theta^{(k-1)}$ при използване на почти оптимална преходна плътност към веригата на Марков, като е доказано, че за определени класове симетрични матрици тази конструкция се опростява съществено.
- Установена е линейна зависимост между параметрите m и k при Резолвентния метод, която позволява оптималния им избор при предварително фиксирано ниво на систематична грешка.

Научно-приложните приноси на дисертационния труд могат да бъдат обобщени:

- Разработени са почти оптимални Степенни и Резолвентни Монте Карло и квази-Монте Карло алгоритми за оценяване на екстремални собствени стойности на симетрични матрици, описани с псевдокод и с дадени условия за балансиране на грешките.

- Установено е, че използването на рандомизирани редици на Соболев осигурява систематично по-добра точност и сходимост в сравнение с редиците на Холтърн и с генераторите на псевдослучайни числа при същата изчислителна сложност.
- Реализирана е имплементация на Резолвентния квази-Монте Карло алгоритъм, която позволява ефективно оценяване на минималната собствена стойност на матрици с голяма размерност.
- Разработените алгоритми са приложени към реална задача от финансовата математика за оценяване на пазарния риск на инвестиционен портфейл чрез максималната собствена стойност на корелационната матрица на активите.
- Показано е, че дялът на обяснената вариация FVE_1 може да се изчисли с висока точност при сравнително малък брой симулации, което прави метода приложим за практически финансов анализ в условия на нарастваща размерност.

Силви-Мария Гюрова е представила четири публикации, свързани с дисертационния труд. Една от тях е статия в научното списание *Contemporary Mathematics*. Две публикации са статии в сборниците на научния форум *Large-Scale Scientific Computing*. Две от публикациите са реферирани и индексирани в *Scopus* и *Web of Science*, като третата е приета за публикуване в поредицата *Lecture Notes in Computer Science* и също ще се индексира. Освен това кандидатката е представила едно научно съобщение от *4th International Conference Numerical Methods for Scientific Computations and Advanced Applications*, изготвено съвместно с научния си ръководител. Във всички представени публикации Силви-Мария Гюрова е първи автор. Резултатите, включени в дисертацията са представени на пет научни конференции.

5. Оценка за изпълнението на минималните изисквания според нормативната уредба
Кандидатката удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по процедурата научни трудове, както и в дисертацията, като е предоставила доклад от проверка на дисертационен труд с лицензирана система за проверка за съвпадащи текстове.

6. Автореферат

Авторефератът е в обем на 51 страници и включва 94 цитирания. Той отразява съдържанието на дисертацията и дава ясна представа за постигнатите резултати и приносите на дисертационния труд.

7. Бележки и препоръки

Бележките и препоръките ми по предварителния текст за взети напълно под внимание в окончателния вариант на дисертационния труд. Забелязах техническа грешка на стр. 102, където посоченият IF: 2.5 (2025) следва да бъде IF: 2.5 (2024). Като продължение на работата бих препоръчала да се разгледат възможностите за систематичен избор на параметрите *skip* и *leap*: Разработването на адаптивен критерий за избор според характеристиките на задачата би повишило ефективността и практическата приложимост на алгоритмите.

8. Лични впечатления от кандидатката

Познавам Силви-Мария Гюрова професионално още от постъпването ѝ в института. Работили сме съвместно по различни проекти, като тя подхожда съвестно към поставените задачи. Кандидатката проявява инициативност и желание за развитие в научната си работа. Стреми се да усвоява нови знания и показва интерес към научноизследователската дейност и ангажираност към изпълнението на академичните си задължения. Проявява готовност да се съобразява с дадените предложения и насоки от колеги и да ги прилага в работата си.

9. Заключение

Въз основа на всичко гореизложено считам, че представените материали удовлетворяват всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав на Република България (ЗРАСРБ), на Правилника за прилагане на ЗРАСРБ, на Правилника на БАН за прилагане на ЗРАСРБ, както и Правилника за специфичните условия за придобиване на научни степени и за заемане академични длъжности в ИИКТ-БАН.

Давам своята положителна оценка за присъждане на Силви-Мария Годорова Гюрова образователната и научна степен „доктор“ в докторска програма „Математическо моделиране и приложение на математиката“ в професионално направление 4.5 „Математика“.

29.05.2026 г.
гр. София

На основание
ЗЗЛД